ĐỒ THỊ EULER
ĐỒ THỊ HAMILTON

Toán rời rạc 2

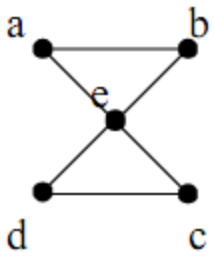
Nội dung

- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton

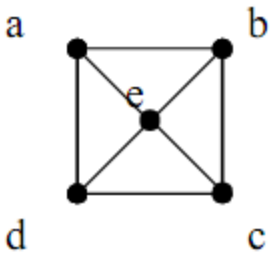
Đồ thị Euler

Khái niệm đồ thị Euler (1/2)

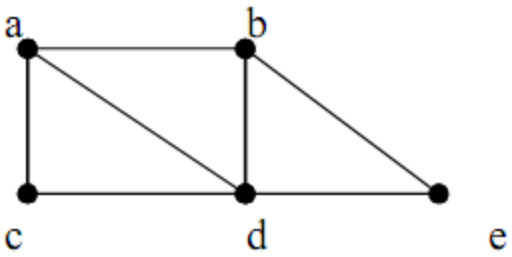
- Định nghĩa.
  - Chu trình đơn trong đồ thị G đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần được gọi là chu trình Euler.
  - Đường đi đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó đúng một lần được gọi là đường đi Euler.
  - Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler.
  - Đồ thị có đường đi Euler được gọi là nửa Euler.
- Ví dụ 1:



G1



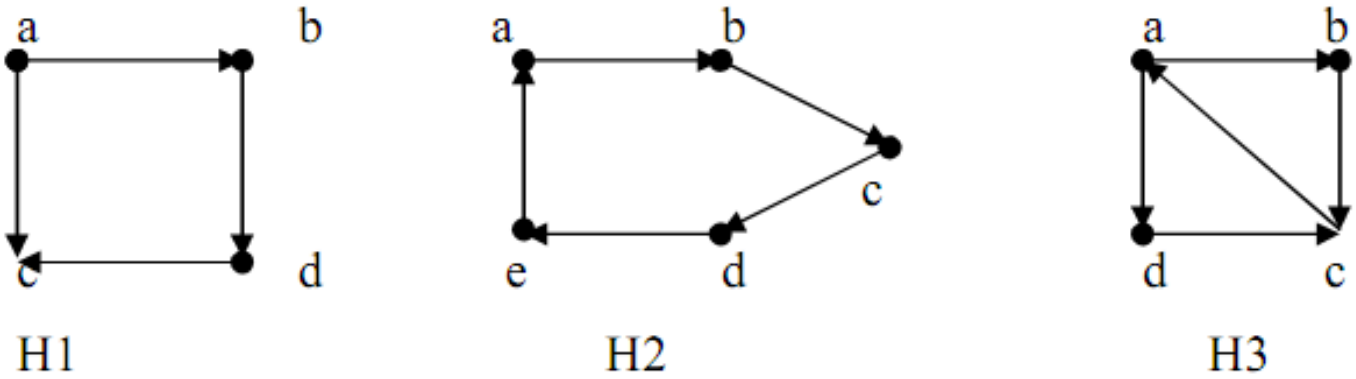
G2



G3

Khái niệm đồ thị Euler (2/2)

- Ví dụ 2:



Điều kiện cần và đủ để đồ thị là Euler

- Đồ thị vô hướng
  - Đồ thị vô hướng liên thông G=<V,E> là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.
- Đồ thị có hướng
  - Đồ thị có hướng liên thông yếu G=<V,E> là đồ thị Euler khi và chỉ khi tất cả các đỉnh của nó đều có bán đỉnh bậc ra bằng bán đỉnh bậc vào (điều này làm cho đồ thị là liên thông mạnh)

Chứng minh đồ thị là Euler

- Với đồ thị vô hướng:
  - Kiểm tra đồ thị có liên thông hay không?
    - Kiểm tra DFS(u) = V hoặc BFS(u) = V $\Rightarrow$l iên thông
  - Kiểm tra bậc của tất cả cả đỉnh có phải số chẵn hay không?
    - Với ma trận kề, tổng các phần tử của hàng u$\diamond$(cột u) là bậc của đỉnh u.
- Với đồ thị có hướng:
  - Kiểm tra đồ thị có liên thông yếu hay không?
    - Kiểm tra đồ thị vô hướng tương ứng là liên thông, hoặc
    - Kiểm tra nếu tồn tại đỉnh $u \in V$ để DFS(u)=V hoặc BFS(u)=V?
  - Kiểm tra tất cả các đỉnh có thỏa mãn bán bậc ra bằng bán bậc vào hay không?
    - Với ma trận kề, bán bậc ra của đỉnh u là $deg^+(u)$ là số các số 1 của hàng u, bán bậc vào của đỉnh u là $deg^-(u)$ là số các số 1 của cột u.

Ví dụ với đồ thị vô hướng

- Cho đồ thị vô hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị Euler .

- Vì BFS(1) = { 1, 2, 6, 3, 5, 7, 4, 11, 8, 10, 12, 9, 13} = V. Do vậy, G liên thông.
- Ta lại có:
  - deg(1) = deg(13) = 2.
  - deg (2) = deg(3) = 4
  - deg(4) = deg(5) = 4
  - deg(6) = deg(7) = 4
  - deg(8) = deg(9) = 4
  - deg(10) = deg(11) =
  - deg(12) = 4

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

Ví dụ với đồ thị có hướng

- Cho đồ thị có hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị Euler .

+ Vì BFS(1) = { 1, 2, 3, 5, 4, 11, 6, 7, 10, 12, 8, 9, 13} = V. Do vậy, G liên thông yếu.

+ Ta lại có:

$deg^+(2)= deg^-(2)=deg^+(3)= eg^-(3) =2$

$deg^+(4)=deg^-(4)=deg^+(5)=deg^-(5) =2$

$deg^+(6)=deg^-(6)=deg^+(7)=deg^-(7) =2$

$deg^+(8)=deg^-(8)=deg^+(9)=deg^-(9) =2$

$deg^+(10) = deg^-(10) = 2$

$deg^+(11) = deg^-(11) =2$

$deg^+(12) = deg^-(12) =2$

$deg^+(1)=deg^-(1)=deg^-(13)=deg^+(13) =1$

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Thuật toán tìm chu trình Euler

Thuật toán Euler-Cycle(u):

Bước 1 (Khởi tạo) :

```
stack = ∅ ;    //Khởi tạo một stack bắt đầu là ∅
CE = ∅ ;       //Khởi tạo mảng CE bắt đầu là ∅
Push (stack, u) ; //Đưa đỉnh u vào ngăn xếp
```

Bước 2 (Lặp):

```
while (stack≠∅ ) do { //Lặp cho đến khi stack rỗng
        s = get(stack); //Lấy đỉnh ở đầu ngăn xếp
        if ( Ke(s) ≠ ∅ ) then { // Nếu danh sách Ke(s) chưa rỗng
                t =< Đỉnh đầu tiên trong Ke(s)>;
                Push(stack, t)' //Đưa t vào stack;
                E = E \ (s,t); // Loại bỏ cạnh (s,t);
        }
        else { //Trường hợp Ke(s)=∅
                s = Pop(stack);// Đưa s ra khỏi ngăn xếp
                s ⇒CE; //Đưa s sang CE
        }
}
```

Bước 3 (Trả lại kết quả) :

```
<Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được chu trình Euler> ;
```

Kiểm nghiệm thuật toán (1/3)

- Tìm chu trình Euler cho đồ thị vô hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như bên cạnh.

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

Kiểm nghiệm thuật toán (2/3)

Bước	Trạng thái Stack	Giá trị CE
1	1	ϕ
2	1, 2	ϕ
3	1, 2, 3	ϕ
4	1, 2, 3, 4	ϕ
5	1, 2, 3, 4,7	ϕ
6	1, 2, 3, 4,7,5	ϕ
7	1, 2, 3, 4,7,5,2	ϕ
8	1, 2, 3, 4,7,5,2,6	ϕ
9	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,1	ϕ
10	1, 2, 3, 4,7,5,2,6	1
11	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5	1
12	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3	1
13	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11	1
14	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4	1
15	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8	1
16	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7	1
17	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7,6	1

Kiểm nghiệm thuật toán (3/3)

Bước	Trạng thái Stack	Giá trị CE
18	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7	1,6
19	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8	1,6,7
20	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9	1,6,7
21	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10	1,6,7
22	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,8	1,6,7
23	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10	1,6,7,8
24	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11	1,6,7,8
25	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12	1,6,7,8
26	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9	1,6,7,8
27	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13	1,6,7,8
28	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12	1,6,7,8
29	1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12,10	1,6,7,8
Đưa lần lượt các đỉnh trong Stack sang CE cho đến khi stack=∅		
30 -..	CE = 1, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 9, 12, 11, 10, 9, 8, 4, 11, 3, 5, 6, 2, 5, 7, 4, 3, 2, 1	
Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được chu trình Euler		
1- 2- 3- 4- 7-5-2-6-5-3-11-4-8-9-10-11-12-9-13-12-10-8-7-6-1		

Cài đặt thuật toán

- Thủ tục Init(): đọc dữ liệu theo khuôn dạng biểu diễn ma trận kề.
- Thủ tục Kiemtra(): Kiểm tra xem G có là Euler hay không.
- Thủ tục EulerCycle (u) : Xây dựng chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u.

Xem code minh họa

Điều kiện cần và đủ để đồ thị là nửa Euler

- Với đồ thị vô hướng
  - Đồ thị vô hướng liên thông G=<V,E> là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi G có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ
    - G có 2 đỉnh bậc lẻ: đường đi Euler xuất phát tại một đỉnh bậc lẻ và kết thúc tại đỉnh bậc lẻ còn lại
    - G có 0 đỉnh bậc lẻ: G chính là đồ thị Euler.
- Đồ thị có hướng
  - Đồ thị có hướng liên thông yếu G =<V,E> là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi:
    - Tồn tại đúng hai đỉnh u, v $\in$ V sao cho

      $deg^+(u) - deg^-(u) = deg^-(v) - deg^+(v) = 1$.
    - Các đỉnh s$\neq$ u, s$\neq$ v còn lại có $deg^+(s) = deg^-(s)$.
    - Đường đi Euler sẽ xuất phát tại đỉnh u và kết thúc tại đỉnh v.

Chứng minh đồ thị là nửa Euler

- Với đồ thị vô hướng:
  - Chứng tỏ đồ thị đã cho liên thông
    - Sử dụng hai thủ tục DFS() hoặc BFS()
  - Có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ
    - Sử dụng tính chất của các phương pháp biểu diễn đồ thị để tìm ra bậc của mỗi đỉnh.
- Với đồ thị có hướng:
  - Chứng tỏ đồ thị đã cho liên thông yếu
    - Sử dụng hai thủ tục DFS() hoặc BFS()
  - Có hai đỉnh $u,v \in V$ thỏa mãn

    $deg^+(u) - deg^-(u) = deg^-(v) - deg^+(v) = 1$
  - Các đỉnh $s \neq u$, $s \neq v$ còn lại có $deg^+(s) = deg^-(s)$.

Ví dụ với đồ thị vô hướng

- Cho đồ thị vô hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị nửa Euler

- Theo tính chất của ma trận kề, tổng các phần tử hàng u là bậc của đỉnh u. Vậy ta có:
  - deg(1) = deg(13) = 3
  - deg (2) = deg(3) = deg(11) = 4
  - deg(12) = deg(6) = deg(7) = 4
  - deg(8) = deg(9) = 4
  - deg(5) = deg(4) = deg(10) = 6
- G liên thông và có 2 đỉnh bậc lẻ u=1 và u=13 nên G là nửa Euler.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ví dụ với đồ thị có hướng

- Cho đồ thị có hướng được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình dưới. Chứng minh là đồ thị nửa Euler .

Chứng minh. Theo tính chất của ma trận kề, $\deg^+(u)$ là tổng các phần tử hàng u, $\deg^-(u)$ là tổng các phần tử cột u. Vì vậy ta có:

$\deg^+(2) = \deg^-(2) = \deg^+(3) = \deg^-(3) = 2$

$\deg^+(6) = \deg^-(6) = \deg^+(7) = \deg^-(7) = 2$

$\deg^+(8) = \deg^-(8) = \deg^+(9) = \deg^-(9) = 2$

$\deg^+(11) = \deg^-(11) = \deg^+(12) = \deg^-(12) = 2$

$\deg^+(5) = \deg^-(5) = \deg^+(4) = \deg^-(4) = \deg^+(10) = \deg^-(10) = 3$

$\deg^+(1) - \deg^-(1) = \deg^-(13) - \deg^+(13) = 1$

G liên thông yếu và có 2 đỉnh u=1 và u=13 thỏa mãn điều kiện nên G là nửa Euler.

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Thuật toán tìm đường đi Euler (1/2)

- Thuật toán tìm đường đi Euler và chu trình Euler chỉ khác nhau duy nhất ở một điểm đó là đầu vào của thuật toán.
- Đối với thuật toán tìm chu trình Euler, đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$ bất kỳ.
- Đối với thuật toán tìm đường đi trình Euler, đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$
  - là đỉnh bậc lẻ đầu tiên trong đối với đồ thị vô hướng.
  - là đỉnh $u \in V$ có deg+ (u)-deg- (u)=1 đối với đồ thị có hướng,

Thuật toán tìm đường đi Euler (2/2)

<u>Thuật toán Euler-Path</u> (u):

- u là đỉnh bậc lẻ đầu tiên nếu G là đồ thị vô hướng
- u là đỉnh có $deg^+(u) - deg^-(u) = 1$.

Bước 1 (Khởi tạo) :

```
stack = ∅ ;    //Khởi tạo một stack bắt đầu là ∅
dCE = ∅ ;      //Khởi tạo mảng dCE bắt đầu là ∅
Push (stack, u) ; //Đưa đỉnh u vào ngăn xếp
```

Bước 2 (Lặp):

```
while (stack≠∅ ) do { //Lặp cho đến khi stack rỗng
        s = get(stack); //Lấy đỉnh ở đầu ngăn xếp
        if ( Ke(s) ≠ ∅ ) then { // Nếu danh sách Ke(s) chưa rỗng
                t =< Đỉnh đầu tiên trong Ke(s)>;
                Push(stack, t)' //Đưa t vào stack;
                E = E \ (s,t); // Loại bỏ cạnh (s,t);
        }
        else { //Trường hợp Ke(s)=∅
                s = Pop(stack);// Đưa s ra khỏi ngăn xếp
                s ⇒dCE; //Đưa s sang dCE
        }
}
```

Bước 3 (Trả lại kết quả) :

<Lật ngược lại các đỉnh trong dCE ta được đường đi Euler> ;

Kiểm nghiệm thuật toán (1/3)

- Tìm đường đi Euler trên đồ thị có hướng liên thông yếu được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- Khi đó, đỉnh u có $deg^+(u)-deg^-(u)=1$ là đỉnh 1.

Kiểm nghiệm thuật toán (2/3)

Bước	Trạng thái Stack	Giá trị dCE
1	1	ϕ
2	1, 2	
3	1, 2, 3	
4	1, 2, 3, 4	
5	1, 2, 3, 4,7	
6	1, 2, 3, 4,7,5	
7	1, 2, 3, 4,7,5,3	
8	1, 2, 3, 4,7,5,3,11	
9	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10	
10	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8	
11	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4	
12	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10	
13	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12	
14	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9	
15	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8	
16	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7	
17	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6	
18	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1	
19	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5	
20	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4	

Kiểm nghiệm thuật toán (3/3)

Bước	Trạng thái Stack	Giá trị dCE
21	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11	
22	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12	
23	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13	
24	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9	
25	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9,10	
26	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9,10,13	
27	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9,10	13,
28	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9	13,10
29	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13	13,10,9
30	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12	13,10,9,13
31	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11	13,10,9,13,12
32	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4	13,10,9,13,12,11
33	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5	13,10,9,13,12,11,4
34	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,6	13,10,9,13,12,11,4
35	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,6,2	13,10,9,13,12,11,4
36	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,6,2,5	13,10,9,13,12,11,4
Đưa lần lượt các đỉnh trong Stack sang dCE		
37 ...	dCE = 13,10,9,13,12,11,4, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 7, 8, 9, 12, 10, 4, 8, 10, 11, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 1	
Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được đường đi Euler		
1- 2- 3- 4- 7- 5- 3- 11- 10- 8 -4- 10- 12- 9- 8- 7- 6- 1-5- 6- 2- 5- 4-11- 12- 13-9-10-13		

Cài đặt thuật toán

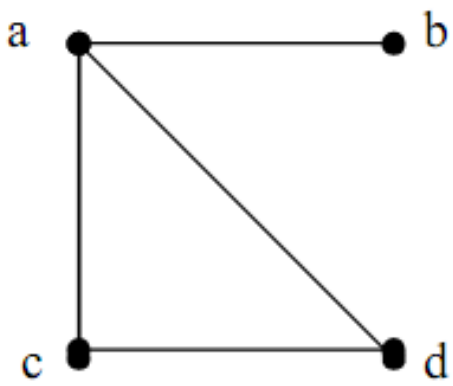
- Thủ tục Init(): đọc dữ liệu theo khuôn dạng biểu diễn ma trận kề.
- Thủ tục Kiemtra(): Kiểm tra xem G có là nửa Euler hay không.
- Thủ tục EulerPath (u) : Xây dựng đường đi Euler bắt đầu tại đỉnh u (đỉnh bậc lẻ đầu tiên).

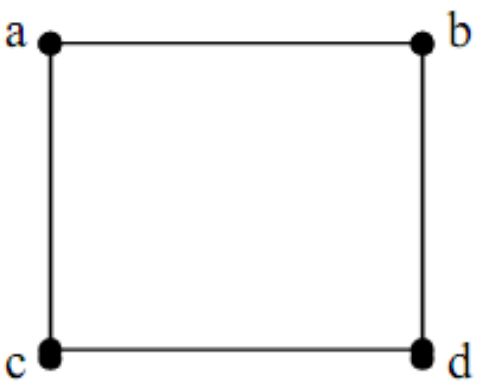
Xem code minh họa

Đồ thị Hamilton

Định nghĩa đồ thị Hamilton

- Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần được gọi là đường đi Hamilton.
- Chu trình bắt đầu tại một đỉnh v nào đó, qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần, sau đó quay trở lại v, được gọi là chu trình Hamilton.
- Đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton nếu có chu trình Hamilton
- Đồ thị được gọi là đồ thị nửa Hamilton nếu có đường đi Hamilton





Vài lưu ý

- Cho đến nay, chưa tìm ra được một tiêu chuẩn để nhận biết một đồ thị có phải là đồ thị Hamilton hay không.
- Cho đến nay, cũng vẫn chưa có thuật toán hiệu quả để kiểm tra một đồ thị có phải là đồ thị Hamilton hay không.

Thuật toán tìm tất cả các chu trình Hamilton (1/2)

- Thuật toán liệt kê tất cả chu trình Hamilton bắt đầu tại đỉnh k.

```
Thuật toán Hamilton( int k) {
/* Liệt kê các chu trình Hamilton của đồ thị bằng cách phát triển dãy đỉnh
(X[1], X[2], . . ., X[k-1] ) của đồ thị G = (V, E) */
        for y∈ Ke(X[k-1]) {
                if (k==n+1) and (y == v0) then
                    Ghinhan(X[1], X[2], . . ., X[n], v0);
                else {
                        X[k]=y; chuaxet[y] = false;
                        Hamilton(k+1);
                        chuaxet[y] = true;
                }
        }
}
```

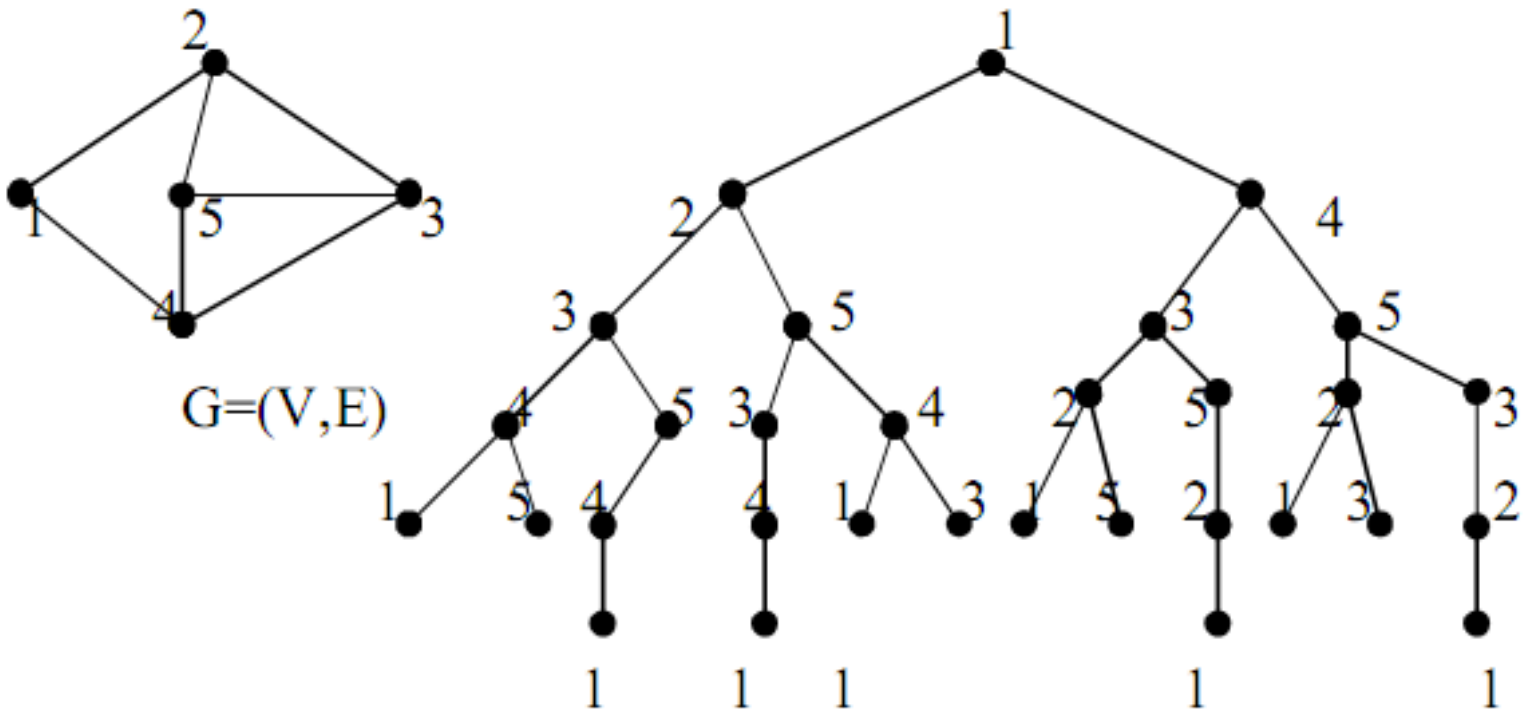
Thuật toán tìm tất cả các chu trình Hamilton (2/2)

- Khi đó, việc liệt kê chu trình Hamilton được thực hiện như sau:

```
Begin
    for (v∈V)  chuaxet[v] = true; /*thiết lập trạng thái các đỉnh*/
    X[1] = v0; (*v0 là một đỉnh nào đó của đồ thị*)
    chuaxet[v0] = false;
    Hamilton(2);
End.
```

Kiểm nghiệm thuật toán

- Với đồ thị G=<V, E> bên trái sẽ cho ta cây tìm kiếm chu trình Hamilton bên phải



Cài đặt thuật toán

- Xem code minh họa

Bài tập

- Làm các bài tập từ 1 đến 7 trong Tài liệu giảng dạy môn Toán rời rạc 2.